Nackte Singularitäten

Hausarbeit im Rahmen der Vorlesung „Physik des Universums“
bei Prof. Dr. Harald Lesch
Ludwig-Maximilians-Universität München

Florian Zeller

15. Oktober 2010

Inhaltsverzeichnis

1. Entstehung einer Singularität

Eine Singularität ist ein hypothetischer Punkt in der die Raumzeit und Massen in der allgemeinen Relativitätstheorie mit stärkster, möglicherweise unendlicher Krümmung zusammenfallen. Die dabei ausschlaggebende Kraft ist die Gravitation, die am besten mit der allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein beschrieben werden kann. Diese Theorie sagt die Existenz von extrem kompakten Objekten voraus, die seit Mitte des 20. Jahrhunderts als Schwarze Löcher Schlagzeilen machen. Da die Grundlage, zur Entstehung, die Gravitation bildet, brauchen wir deshalb extrem massereiche Objekte die dazu in der Lage sind, womit nur Sterne einer gewissen Größe in Frage kommen.

Ausgangspunkt dafür bildet die wohl berühmteste Formel der Welt $E = mc^2$. Denn mit Hilfe dieser Formel konnte man zum ersten Mal erklären, wie Sterne durch Energieverlust in Form von Strahlung funktionieren. Dadruch erkannte man, dass Sterne durch ihre Energiefreisetzung Masse verlieren und dass es im Inneren der Sterne deshalb Kräfte gibt, Strahlungsdruck und Gasdruck, die nach außen gerichtet sind. Rotiert der Stern, wirkt zudem noch die daraus resultierende Fliehkraft, die von der Rotationsachse nach außen gerichtet ist. Bei einem stabilen Stern, der noch durch Kernfusion viel Energie freisetzt, ist der Stern im hydrostatischen Gleichgewicht, indem sich alle vorkommenden Kräfte im Gleichgewicht befinden was vereinfacht ausgedrückt:

$$p_{Gravitation} = p_{Fliehkraft} + p_{Gasdruck} + p_{Strahlungsdruck}$$

Nachdem der Stern sein ganzes Fusionsmaterial verbraucht hat, kommt die Zeit wo dieser nicht mehr durch seinen Strahlungsdruck und den Gasdruck gegen die Gravitation ankommt und das Gleichgewicht gestört wird. Ab diesem Zeitpunkt kommt es darauf an, welche Größe der Stern für sein weiteres Schicksaal hat. Ist der Stern kleiner als 1,46 Sonnenmassen wird durch den Gravitationskollaps aus dem Stern ein sog. Weißer Zwerg. Liegt die Größe zwischen 1,5 – 3 Sonnenmassen ist das Resultat ein Neutronenstern. Die dahinter steckenden physikalischen Vorgänge werden hier nicht weiter erläutert. Interessant ist jedoch alles was über 3 Sonnenmassen hinaus geht. Die Gravitationskräfte bei solch großen Sternen, wenn sie zusammenbrechen, sind so groß, dass hier durch den jeweils errechneten Schwarzschild-Radius

$$R_S = \frac{2\,GM}{c^2}$$

die Masse des Sterns so dicht zusammengequetscht wird, dass die Gravitation sich in einem, durch die Relativitätstheorie definierten; unendlichen Punkt bündelt. Dieser Radius hängt nur von der Masse M des Sterns ab und sonst nur von zwei Naturkonstanten in der Physik (der newtonsche Gravitationskontate G und der Vakuumlichtgeschwindigkeit c) [4]. Die Schwarzschild-Lösung war eine der ersten Lösungen der Einsteinischen Feldgleichungen die in Kugelkoordinaten (t, r, θ, ϕ)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$$

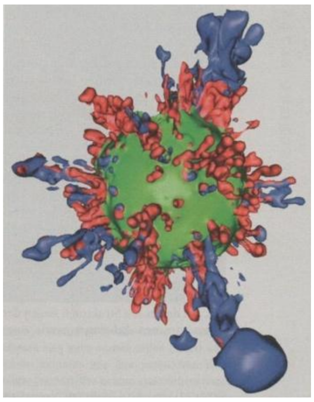
lautet [6]. Sie repräsentiert die Raumzeit um ein kugelförmiges Objekt was zu der Vorhersage von Schwarzen Löchern in dieser Theorie, die durch einen Ereignishorizont verhüllt sind führte. Im Zentrum eines durch die Gravitation in sich zusammengestürztem Stern tritt also bei dieser Feldgleichung mit $r = 0$ ein Phänomen auf das als Singularität bezeichnet wird. Somit ist eine Singularität ein Punkt an dem die Krümmung der Raumzeit durch die Gravitation unendlich groß ist und zwar in jedem Koordinatensystem.

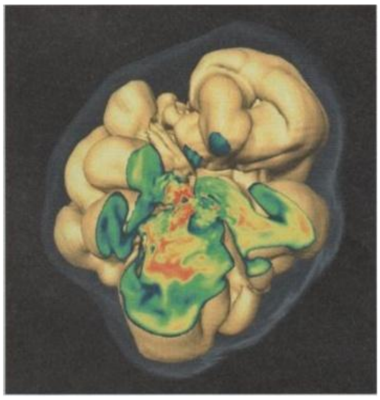
Jedoch steht man vor großen Problemen, wenn man den Begriff der Singularität mathematisch definieren möchte, da eine unendliche Krümmung nicht genau definiert werden kann. Dies hat zur Folge, dass man den Ort einer Singularität nicht mehr bestimmen kann, da der Punkt der als Singularität bezeichnet wird, nicht mehr in der Raumzeit enthalten ist [4].

2. Falsche Annahmen bei den ersten Berechnungen

In den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts war es noch unmöglich mit Hilfe von technischen Messgeräten und Hilfsmittel in das Innere der Sterne bzw. unserer Sonne zu schauen, da diese Möglichkeiten erst in der zweiten Hälfte entwickelt worden sind. Somit ging man damals von homogenen Sternen, die also von innen nach außen gleich aufgebaut sind, bei den Berechnungen der in sich kollabierenden Sterne aus. Neue Forschungserkenntnisse über Sterne enthüllten jedoch, dass die Sterne nicht homogen sonder inhomogen, also nicht gleichmäßig aufgebaut sind, was besonders wichtig für den Moment der Sternimplosion ist [3].

Während der Lebenszeit fusionieren die Sterne die in ihrem Inneren vorkommenden Elemente zu neuen Elementen wie z.B. unsere Sonne Wasserstoff zu Helium fusioniert. Wenn der Stern durch seine Gravitation zusammenbricht, wird im inneren eine Stoßwelle freigesetzt, die nach außen gerichtet ist und somit eine Supernova-Explosion mit sich bringt.





Bei den ersten Berechnungen mit homogenen Sternen, die zu der Theorie der Schwarzen Löcher mit einem Ereignishorizont führten, ging man davon aus, dass der Stern durch diese nach außen gerichtete Stoßwelle seine äußeren Schichten mit Elementen gleichmäßig in den Weltraum absprengt. Neue 3-D Simulationen von Sternexplosionen massereicher Sterne (sieht Bilder), die am Max-Plank-Institut für Astrophysik in Garching gemacht wurden, zeigen jedoch, dass die Explosion sich keines Wegs gleichmäßig verteilt. Das rechte Bild zeigt die Situation im kollabierenden Kern wenige Sekunden nach Beginn der Supernova-Explosion und das linke Bild die ungleichmäßige Verteilung der Elemente 2,5 Stunden nach Beginn [5]. Dadurch kann man davon ausgehen, dass auch die nach innen gerichtete implodierende Gravitation ebenfalls durch die Inhomogenität des Sterns beeinflusst wird. Somit wirken also bei der Entstehung der Singularität die Dichte des Sterns und dessen Gasdruck entscheidend mit, was man bei den ersten Berechnungen noch nicht berücksichtigte.

Zudem kommt noch das Problem, dass Einsteins Gravitationsgleichungen für seine Schwierigkeiten schon immer berüchtigt waren und so wurden die ersten Anwendungen auf kollabierende Sterne nur mit vereinfachten Annahmen durchgerechnet. Man betrachtete z.B. nur perfekt kugelförmige Sterne mit einer homogenen Dichte und ignorierte dabei den Gasdruck. Die Berechnungen ergaben, dass wenn ein solcher idealisierter Stern zusammenbricht, die Schwerkraft an der Oberfläche anwächst und schließlich so stark wird, dass diese jegliche Strahlung und Materie einfängt. Da dies dazu führt, dass es nichts gibt was einer Singularität entkommen kann, nicht einmal Licht, wurde die Theorie des Ereignishorizonts und somit des Schwarzen Loches geboren. Diese Theorie hat sich sogar so tief verfestigt, dass daraus eine sog. Hypothese der kosmischen Zensur geworden ist, die noch heute der modernen Theorie Schwarzer Löcher zu Grunde liegt. Danach verbiete uns die Natur jemals eine Singularität zu sehen, weil sie stets in der Raumzeit von einem Horizont umhüllt sei [2]. Jedoch ist diese Meinung am bröckeln und immer mehr in der Fachwelt umstritten.

3. Erste mathematische Annahme durch die Kerr-Metrik

In der Umgebung von rotierenden Masseobjekten existiert eine Raumzeit die eine Rotationssymmetrie aufweist und stationär ist, also sich zeitlich nicht verändert. Im Universum existieren solche Orte die als rotierende Schwarze Löcher bekannt sind. Aus diesem Grund kann man damit diese durch die Kerr-Metrik gut beschreiben.

Die Herangehensweise beginnt zunächst damit, dass man

$\sum := r^2 + a^2 cos^2\theta$ setzt und $\Delta := r^2 + a^2 + e^2 - 2Mr$

womit man für die Kerr-Metrik den Ausdruck:

$$ds^2 = -\frac{\Delta - \mathrm{a}^2\sin^2\theta}{\Sigma}dt^2 - \frac{2asin^2\theta(r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma}dtd\phi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 sin^2\theta}{\Sigma}sin^2\theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d^2$$

Formel von http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/gravitation/node37.html am 04.10.10 um 00.01 Uhr / Vertrauenswürdig da Literaturverzeichnis auf WALD, ROBERT M.: *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, 1984. Verweist)

erhält.

Auch die Kerr-Metrik gibt den mathematischen Beweis für einen Ereignishorizont bei rotierenden Schwarzen Löchern. Dieser liegt bei

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - e^2}$$

Jedoch existiert bei diesem Ansatz nicht nur ein Ereignishorizont wie im klassischen Bild. Denn wenn ein Körper hier den Ereignishorizont überschritten hat steuert er nicht direkt auf die Singularität bei $r = 0$ hin sondern trifft noch auf einen inneren Horizont der bei

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2 - e^2}$$

liegt. Im Ganzen handelt es sich hier nicht um eine Punktsingularität sondern um eine sog. Ringsingularität.

Diese mathematische Kerr-Lösung hat jedoch auch zu Beginn zu einem mathematischen Kuriosum geführt die als nackte Singularität bezeichnet wird. Sie wird deshalb nackt genannt, weil es hier keinen Ereignishorizont im klassischen Sinne gibt. Denn wenn unter der Wurzel

$$M^2 < a^2 + e^2$$

ist, entsteht kein Ereignishorizont. In diesem Fall repräsentiert die Kerr-Lösung kein Schwarzes Loch.

4. Beispiele von Nackte Singularitäten als numerische Simulationen

4.1 Die Scalar-Tensor Theorie [7]

Die Scalar-Tensor Theorie ist eine alternative Theorie der Schwerkraft, die auf eine lange Geschichte der Literatur zurückgreift. Dabei wird das Gravitationsfeld von einem oder mehreren Skalarfeldern zusätzlich zu dem Standard Tensor der allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben. Sie dient für ein besseres Verständnis der Eigenschaften der Raumzeit und kann somit auch benutzt werden, um die Existenz von Nackten Singularitäten zu untersuchen.

Ein Model, bei dem das Skalarfeld φ gekoppelt ist mit einer Skalar-Tensor Theorie der Gravitation lautet

$$S = S_G + S_m$$

$$:= \frac{1}{4}\int_M (R - 2g^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\,\partial_\nu\psi)\sqrt{-g}d^4x - \frac{1}{2}\int_M \tilde{g}^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\sqrt{-\tilde{g}}d^4x$$

Dabei gilt, dass $\frac{4\pi G}{c^4} = 1$ ist und die Raumzeit M 4-dimensional mit zwei Metriken ausgestattet: die Einsteinmetrik $g_{\mu\nu}$ und die Brans-Dicke $\tilde{g}_{\mu\nu} = a^2(\psi)g_{\mu\nu}$.

Durch diese Theorie stellt φ den Gehalt der Raumzeit dar und ψ erzeugt das Gravitationsfeld.

Betrachtet man nun allgemeine kugelsymmetrische Koordinaten erhält man eine Rundmetrik auf 2-Sphären (R_{rr} und $R_{\theta\theta}$ mit $R_{\varphi\varphi} = sin^2 R_{\theta\theta}$).

Durch weiteres Ausführen der Feldgleichungen erhält man Raumzeiten die als Lösung des reduzierten Systems eine analytische Betrachtung in der Mitte der Kugelsymmetrie erlauben. Dies beschreibt eine Konstruktion der Vergangenheit der Singularität zwischen dem Zentrum und der Vergangenheit des Lichtkegels. Dadurch wird es ermöglicht, eine numerische Integration diesbezüglich mit einem vierten Ordnung-Kutta Schema in vier Schritten durchzuführen. Dazu sind vier Schritte nötig.

(i) Mit den entsprechenden Koordinaten zu dem endlichen Wert $x_o = e^{80}$ zu integrieren.
(ii) Auf das reduzierte System wechseln mit $\lim_{s\to s*} \alpha = -\infty$.

(iii) Man startet von $s_1 > s_*$ um das System s_* zu erreichen mit zwei neuen Parametern $\theta_1 = \theta(s_1)$ und $\xi_1 = \xi(s_1)$

(iv) Schließlich Überprüfung ob das System gegen einen stationären Punkt konvergiert oder divergiert.

Daraus entstehen die Gleichungen

$$\frac{d\alpha}{ds} = \alpha((\theta + k)^2 + (1 - k^2)(1 - \alpha)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = k\alpha(k\theta - 1) + \theta\left((\theta + k)^2 - (1 + k^2)\right)$$

mit $\lim_{s \to s*} \theta = \frac{1}{k}$.

In Abhängigkeit von k wird das System $S \to S^*$ integriert um den ungefähren Wert von n zu bestimmen. Für den Bereich $0 < K_* < 1$ ergibt es folgende Erweiterung

$$K(s) = K_* - \frac{\sigma^{2K_*}}{K_*^2 + \sigma^2}(s - s_*) + o(|s - s_*|)$$

wodurch man eine numerische Abschätzung der beiden Felder $s = s_*$ erhält. Man führt in der Regel mehrere Integrationen von s_1 in Richtung s_* mit verschiedem Startwert $K(s_1)$ durch.

Durch dieses numerisches Rechenmodell kann man die Bildung von nackten Singularitäten bei dem Prozess des Gravitationkollaps untersuchen von einer Familie von Raumzeiten, die eine solche nackte Singularität zur Folge hat. Dabei ist die Konstante k ein Parameter zur Förderung einer neuen dynamischen Variablen K wodurch man den Innenbereich des vergangenen Lichtkegels einer nackten Singularität analysieren kann. Dabei nimmt die Variable K stets vom Anfangswert ab auf einen Wert $K^* < 1$ in den vergangenen Lichtkegel. Dabei ist zu erwähnen, dass diese Lösung als wahrscheinlich sehr instabil für kleine Störungen gilt.

4.2 Quanten-Singularität in (2+1) – dimensionaler Materie [8]

Diese Theorie der Banados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) Schwarzen Löcher hat viel Aufmerksamkeit erregt, da diese eine einfache mathematische Struktur einfügt, für ein besseres Verständnis zur Untersuchung der allgemeinen Aspekte der Physik, wie Ereignishorizont und Hawking-Strahlung, von Schwarzen Löchern. Diese Studie dient auch zur Untersuchung von Nackten Singularitäten obwohl diese auch einräumt, dass es keinen gemeinsamen Konsens über Struktur oder Existenz solcher Singularitäten gibt. Das Auftreten Nackter Singularitäten wurde aus quantenmechanischer Sicht analysiert und mit dem Quanten-Test Teilchen, die Klein-Gordon-und Dirac-Gleichungen gehorchen, untersucht.

Die (2+1) – dimensionale Theorie Einsteins mit nicht-linearer Elektrodynamik gekoppelt lautet

$$S = \int \sqrt{g}\left(\frac{1}{16\pi}(R - 2\Lambda) + L(F)\right) d^3x$$

Daraus ergibt sich eine Metrik die gegeben ist durch

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2$$

die wiederum die Metrik-Funktion wie folgt ergibt

$$f(r) = -m + \frac{r^2}{l^2} + \frac{4q^2}{3r}$$

Dabei ist m > 0 die Masse, $l^2 = -\Lambda^{-1}$ der Fall $\Lambda > 0$ einer de-Sitter Raumzeit und q die elektrische Ladung. Diese Metrik repräsentiert die BTZ Raumzeit in einer nicht-linearen Elektrodynamik. Das Kretschmann Skalar zeigt die Krümmung der Singularität und ist gegeben durch

$$\kappa = \frac{12}{l^4} + 6\frac{\beta^2}{r^6}$$

wobei $\beta = \frac{4q^2}{3}$ ist. Bei r = 0 ist es eine typisch zentralgewölbte Singularität. Durch die Werte von Λ, m und q kann die Singularität von Einzel- oder Doppelhorizonten umgeben sein. Aber für bestimmte Werte von diesen Parametern wird die Singularität nackt.

Um die Bedingungen für eine Nackte Singularität dieser Metrik-Funktion zu verstehen schreibt man sie in der folgenden Form

$$f(r) = -\frac{m}{r}\left(r + \tilde{\Lambda}r^3 - \frac{4\tilde{q}^2}{3}\right)$$

Der Bereich des Koordinatensystems r variiert von 0 bis ∞ und die Voraussetzung für eine nackte Singularität zeigt die negative Wurzel

$$r = u^{1/3} - \frac{1}{3\tilde{\Lambda}u^{1/3}} \quad \text{mit} \quad u = \frac{12\tilde{q}^2\tilde{\Lambda} \pm \sqrt{3\tilde{\Lambda}(12\tilde{q}^4\tilde{\Lambda}+1)}}{18\tilde{\Lambda}^2}$$

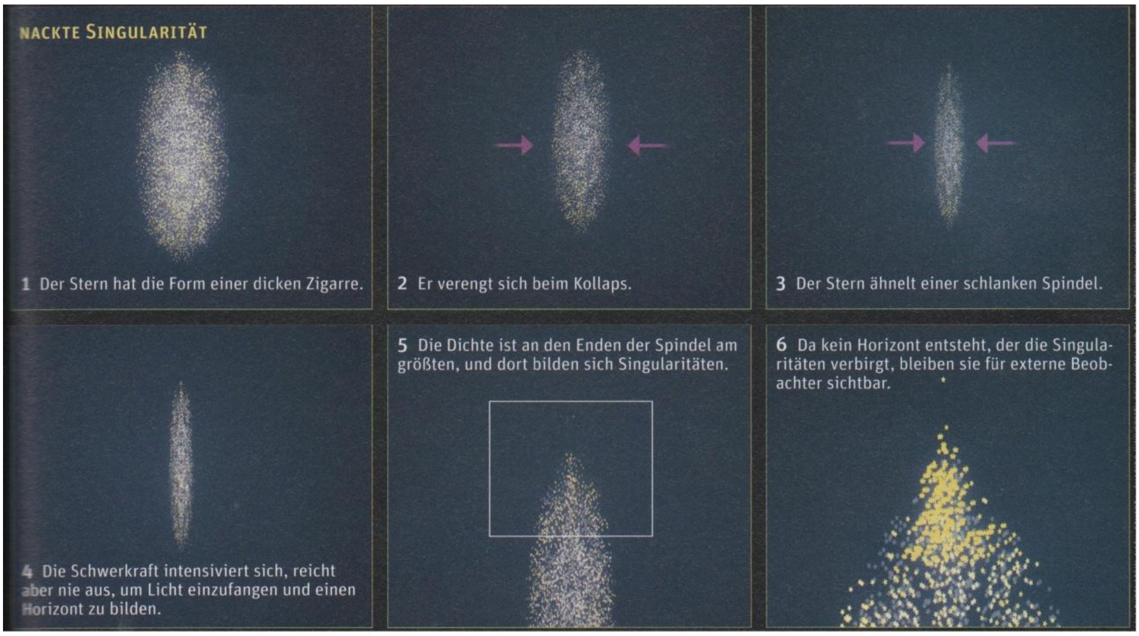
mit dem Endresultat

$$r = a^{1/3}\left\{\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 \mp \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right\} \quad \text{mit} \quad a = \frac{2\tilde{q}^2}{3\tilde{\Lambda}} \text{ und } b = \frac{\sqrt{3\tilde{\Lambda}(12\tilde{q}^4\tilde{\Lambda}+1)}}{18\tilde{\Lambda}^2}$$

Somit ergibt sich als Ergebnis für eine Nackte Singularität die Lösungen

$$\tilde{\Lambda} < \frac{1}{12\tilde{q}^4} \quad \text{oder} \quad \Lambda < \frac{m^3}{12q^4}$$

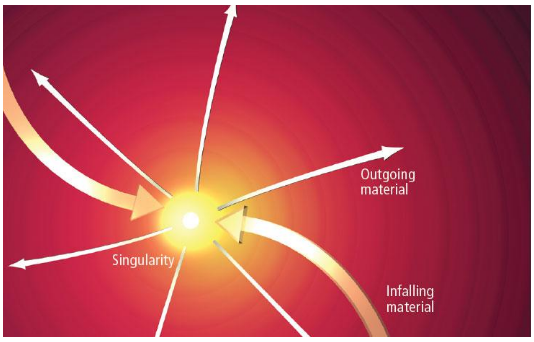
4.3 Beispiel einer Computersimulation



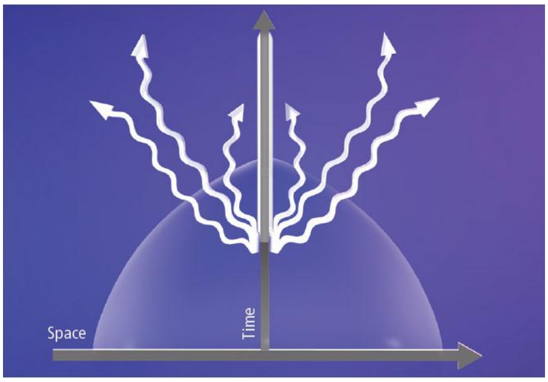
Computersimulation eines Sterns mit der Form einer dicken Zigarre bei der der Stern als einen Schwarm von Körnern behandelt wird, dessen Schwerkraft so übermächtig ist, dass andere Naturkräfte wie der Gasdruck im Vergleich zur Gravitation keine Rolle spielen [3].

4.4 Theoretische Überlegungen aufgrund der numerischen Modelle

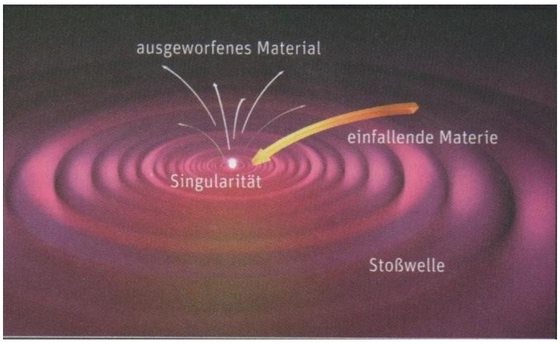
Es sind mittlerweile viele Beispiele von Modellen und Rechnungen bekannt, die zur Erkundung von möglichen Eigenschaften nackter Singularitäten wie Krümmungsstärke, Stabilität des Cauchy Horizonts und der Rotverschiebung dienen.



Durch das Fehlen eines Ereignishorizonts kann die nackte Singularität Materie aufsaugen aber auch wieder auswerfen [3].



Beim Kollaps des Sterns zu einer Singularität reicht seine Intensität der Schwerkraft nicht aus um Licht am entkommen zu hindern [3].



Die einfallende Materie bleibt bis zu ihrem Zusammenstoß mit der Singularität sichtbar. Die intensive Gravitation kann energiereiche Stoßwellen erzeugen [3].

5. Nackte Singularitäten bereits Entdeckt?

Auch wenn die allgemeine Relativitätstheorie generell nackte Singularitäten nicht verbietet, folgt nicht daraus automatisch, dass diese auch in der Natur vorkommen. Denn die Sterne könnten über die Vorrausetzungen zur Bildung von nackten Singularitäten nicht hinauskommen und darüber hinaus könnte es dennoch in der allgemeinen Relativitätstheorie ein Prinzip geben, welches wir noch nicht kennen, die solche Singularitäten verbietet. [2]

Jedoch zum Auffinden von Singularitäten als Schwarze Löche, die immer noch von der Mehrheit der Forscher vertreten werden, gibt es einige indirekte Methoden, da man diese Kuriositäten von der Erde aus nicht direkt beobachten kann.

Ein Beispiel wäre da die Eddington-Relation, die auf dem Verständnis des Akkretionsprozesses beruht. Wenn also massereiche Schwarze Löcher Materie verschlingen wird dabei mehr Gravitationsenergie freigesetzt, in Form von elektromagnetischen Wellen, die sich in einer helleren Leuchtkraft oder in Form von Gammastrahlenblitze ausdrücken. Jedoch spielen bei dieser Methode auch unbekannte Größen wie z.B. der Wirkungsgrad von freigesetzter Gravitationsenergie in Strahlungsenergie eine Rolle [9].

Ein weiteres Beispiel wäre die kinetische Methode, mit deren Hilfe man die Existenz von supermassereichen Schwarzen Löchern im Zentrum von Galaxien, unserer eingeschlossen, bewiesen hat. Diese Methode beruht auf die Bewegung der Sterne die man mit Hilfe von Teleskopen beobachten und messen kann. Aufgrund der Bewegung der Sterne kann man mit Hilfe des 3. Keplerischen Gesetzes diese in Beziehung zur Masse des von ihnen umlaufenden Zentralkörpers mit

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = const$$

bringen, womit sich die Masse eines Schwarzen Loches aber auch von Planeten und Sternen bestimmen lässt [4].

Da Nackte Singularitäten bisweilen nur in der Theorie als mathematische Modelle vorkommen und wir sie auch noch nicht ganz verstehen, können ihre Eigenschaften auch nicht mehr als Theorie sein. Dennoch haben diese theoretischen Eigenschaften größten Teils ähnliche Eigenschaften wie die eines Schwarzen Loches, wie z.B. die durch Gravitation einfallende Materie, auch wenn sie diese wieder freigeben kann. Wenn man aber die beiden oben erwähnten Methoden betrachtet, kann man nicht mit absoluter Sicherheit sagen, dass unter all den bereits gefundenen Schwarzen Löchern nicht auch einige als Nackte Singularitäten gelten können. Evtl. haben wir schon längst eine Nackte Singularität unter den unzähligen Beispielen für Schwarze Löcher gefunden und nur unsere Skepsis vor neuen mathematischen Gedankenspielen oder das Umdenken, dass es noch andere Phänomene im Universum gibt, hindert uns daran es zu erkennen. Auch wenn man noch nicht den direkten Beweis solcher Singularitäten hat, kann es jedoch durchaus sein, dass es ein Gesetze der „nackten Singularität Mechanik" gibt [2].

Literaturverzeichnis

[1] Rituparno Goswami, Pankaj S. Joshi, Parampreet Singh: *„Quantum evaporation of a naked singularity"* vom 30.09.2010 unter http://arxiv.org/abs/gr-qc/0506129 (vertrauenswürdig, da wissenschaftliche Veröffentlichung)

[2] T. P. Singh: *"GRAVITATIONAL COLLAPSE; BLACK HOLES AND NAKED SINGULARITIES"* vom 29.09.2010 unter http://arxiv.org/abs/gr-qc/9805066 (vertrauenswürdig, da wissenschaftliche Veröffentlichung)

[3] Pankaj S. Joshi: *"Nackte Singularitäten"* aus Spektrum der Wissenschaft 12/09 Seite 24 - 31

[4] Andreas Müller: *„Schwarze Löcher – Kuriose Wirbel der Raumzeit"* aus Sterne und Weltraum 5/2010 Seite 40 - 51

[5] Hans-Thomas Janka: *„Supernova in 3-D"* aus Spektrum der Wissenschaft 08/10 Seite 12 – 14.

[6] Dr. Thomas Müller: *„Schwarze Löcher – Das dunkle Geheimnis der Gravitation"* vom 30.09.10 unter http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/downloads/Web-Artikel/SchwarzeLoecher_AMueller2007.pdf

[7] Nabil Bedjaoui, Phlippe G. LeFloch, Jos´e M. Mart´in-Garc´ia, J´er^ome Novak: *„Existence of naked singularities in scalar-tensor theories of gravitation. An analytical and numerical study "* vom 12. 10.10 unter http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1008/1008.4238v1.pdf (vertrauenswürdig, da wissenschaftliche Veröffentlichung)

[8] O. Unver & O. Gurtug: *„Quantum singularities in (2 + 1) dimensional matter coupled black hole spacetimes"* vom 12.10.10 unter http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1004/1004.2572v3.pdf (vertrauenswürdig, da wissenschaftliche Veröffentlichung)

[9] *„Eddington-Leuchtkraft"* am 16.10.10 um 16.44 Uhr von http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/lexdt_e.html (vertrauenswürdig da Fachseite für Astronomie)